（続）ラングレーの問題

この問題は，1922 年 10 月に，イギリスの数学者**エドワード・マン・ラングレー**（1851～1933）によって "A Problem" のタイトルで発表された有名な問題である。引き続き解を考えていきたい。

問題

図 1 のような頂角が 20°，$AB=AC$ である二等辺三角形 ABC で，辺 AB 上に $\angle BCD=50°$ となる点 D，辺 AC 上に $\angle CBE=60°$ となる点 E をとったとき，$\angle BED$ の大きさを求めよ。

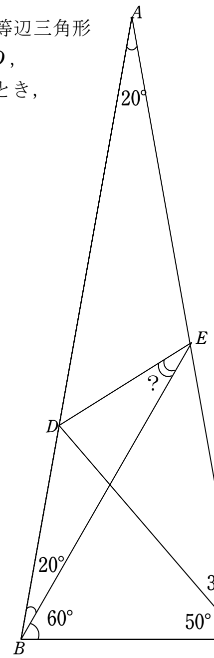
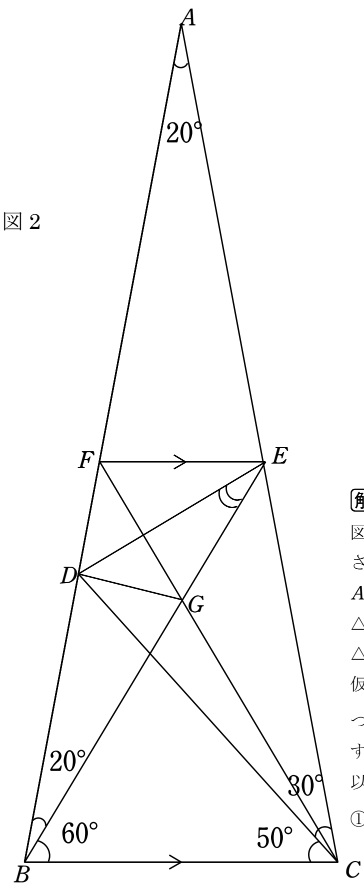


図1

図 2

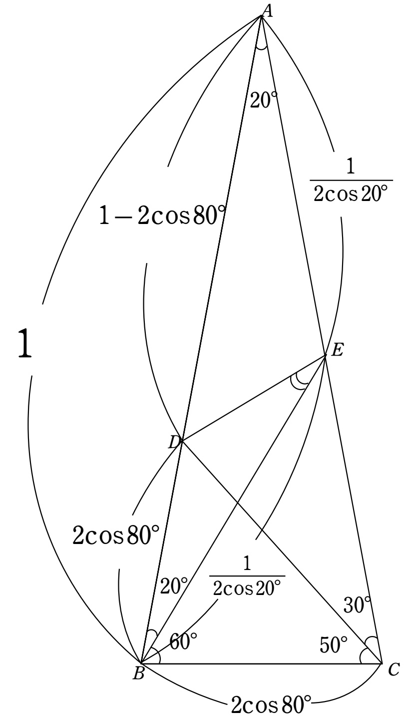


解答 3

図2のように，点 E より辺 CB に平行な直線をひき，辺 AB との交点を F とする。
さらに，直線 CF と直線 BE の交点を G とし，D と G を結ぶ。

$AE=AF$ より，$EC=FB$，$\angle CEF=\angle BFE$，$EF=FE$ より，
$\triangle CEF \equiv \triangle BFE$　よって，$\angle CFE=\angle BEF=60°$ であり，
$\triangle GEF$ と $\triangle GBC$ は正三角形である。……①
仮定より，$BC=BD$，①より，$BC=BG$　ゆえに，$BD=BG$
つまり，$\angle BDG=\angle BGD=80°$，よって，$\angle DGF=\angle DFG=40°$
すなわち，$DG=DF$，また①より，$GE=FE$，$DE=DE$
以上より，$\triangle DGE \equiv \triangle DFE$，ゆえに，$\angle DEG=\angle DEF$
①より，$\angle GEF=60°$，したがって，$\underline{\angle DEG=\angle BED=30°}$　答

図 3



解答 4

$AB=1$ とする。$2\,AE\cos 20°=1$ より，$AE=\dfrac{1}{2\cos 20°}$，　よって，$BE=AE=\dfrac{1}{2\cos 20°}$

また，$BD=BC=2\cos 80°$　$\Longrightarrow$　$AD=1-2\cos 80°$

$\triangle ADC$ と $\triangle BDE$ で，$\angle CAD=\angle EBD=20°$ ……①

$AD:AC=(1-2\cos 80°):1$，　$BD:BE=2\cos 80°:\dfrac{1}{2\cos 20°}=4\cos 80°\cos 20°:1$

ここで，積を和に直す公式より，$4\cos 80°\cos 20°=2\cos 100°+2\cos 60°=1-2\cos 80°$

ゆえに，$AD:AC=BD:BE$，　対応する2辺の比とその間の角が等しいから，

$\triangle ADC \backsim \triangle BDE$　したがって，$\underline{\angle BED=\angle ACD=30°}$　答

解説　今回の解答 3 は，やはり補助線 EF が決め手となっている。正三角形を効果的に使い，最後は三角形の合同で締めくくっている。それに対して解答 4 は，三角形の相似を予想して，2 辺の比が等しいことを示し，一気に答えを導いており，三角関数の効果的な利用がある。